量子场论的数学物理与物理数学*

赵树松　　　　潘留仙

（云南大学物理系，昆明强子动力学研究组）（湖南益阳师专）

摘　要　本文简要综述了1970—1989年量子场论及强子物理研究存在的12个疑团.

关键词　量子场论；强子物理

重整化的量子场

$$\Phi_R(x)=V^{-\frac{1}{2}}\sum_k[a_k f_k^*(x)+a_k^+ f_k(x)] \qquad \text{Bose} \tag{1}$$

$$\Psi_R(x)=V^{-\frac{1}{2}}\sum_k[b f_k^*(x)+b_k^+ f_l(x)] \qquad \text{Fermi} \tag{2}$$

这里单粒子真空跃迁幅[1]

$$\langle O|\Phi^{in}_{out}|k\rangle=g_I(x)\cdot\frac{Z_B^{-1/2}(g_R)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\cdot\exp[-ikx] \tag{3}$$

$$\langle O|\Psi^{in}_{out}|k\rangle=g_I(x)\cdot\frac{Z_F^{-\frac{1}{2}}(g_R)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\cdot\exp[-ikx] \tag{4}$$

从(1)(2)到(3)(4)已经用到必不可免的程序

$$V^{-\frac{1}{2}}\sum_{k_n}\leftrightarrow(2\pi)^{-3/2}\iiint d^3k \tag{5}$$

在广函表达式(3)(4)中无穷可微的好函数 $g_I(x)$ 至今没有物理解释，在古典数学里令(3)(4)中的 $g_I(x)=1$，但平面波的归一化为 $\delta(x-x')$ 或 $\delta(k-k')$ 包含着错误的积分交换运算，而且使得跃迁几率中出现 $\delta^{(4)}(k)$ 平方的因子

$$|S(k,k')|\sim|\delta^{(4)}(k-k')|^2 \tag{6}$$

这里能量-动量守恒条件

$$\delta^{(4)}(k-k')\equiv\iiiint e^{i(k-k')x}\cdot d^4x \tag{7}$$

$$|\delta^{(4)}(k-k')|^2\equiv V\cdot\lim_{t\to\infty} t\to\infty \tag{8}$$

量子化程序(5)将可数 Hilbert 空间 $H-|k_n\rangle$ 过渡到不可数 Hilbert 空间 $H-|k_n\rangle$，这两个空间具有不同的基数(Cardinal Number)：

$$\mathrm{Card}[H-|k_n\rangle]=\aleph\,\mathrm{Card}[H-|k_n\rangle]=2^{\aleph_0} \tag{9}$$

而且具有显著不同的维度(Dimensiongrad)：

$$\mathrm{Dim}[H-|k_n\rangle]=1 \qquad \mathrm{Dim}[H-|k_n\rangle]=+\infty \tag{10}$$

生灭算子满足渐近条件

* 收稿日期：1995—01—26
云南省基础研究基金资助

$$\lim_{t\to\pm\infty}\langle a|a_k(t)|b\rangle = Z_B^{1/2}(g_R)\langle a|a_{k\,out}^{in}|b\rangle \tag{11}$$

在 D^0 维物理时空 $S_T^{D^0}(x)$ 中，公理化理论框架的场算子积

$$(\Phi_R(x_1)\Phi_R(x_2), g_I(x)g_I(x)) \tag{12}$$

这里好函数（试验函数）可以为

$$(\prod_{v=1}^{D^0} I_v)g_I(x) = \prod_{v=1}^{D^0}\exp[-(x_\mu - x'_\mu)^2/2I_v^2](2\pi)^{-D^0/2} \tag{13}$$

在 $S_T^{D^0}(x)$ 共轭空间 $S_T^{D^0}(k)$ 中好函数

$$(\prod_{v=1}^{D^0} I_v^{-1})g_I(k) = \prod_{v=0}^{D^0}\exp[-(k_\mu - k'_v)^2 I_v^2/2](2\pi)^{-D^0/2} \tag{14}$$

表达式(12)中的算子值广函（“分布”）之乘积怎么定义？从(1)到(14)式，无论从物理上看还是从数学上看都是令人困惑的. 量子场论从 1954 年起开始用 L. Schwartz 分布于 Green 函数、目前正从古典数学过渡到现代数学，而且于 1970 年之后加快了行进的步伐，强相互作用动力学的建立有了希望.

重整群的研究经过 15 年的追求，1970 年建立起 Callan-Symanzik 方程（类空），后来发展为亚群对称性(1985)、成为强子多重产生的理论基础. G. t' Hooft 维度正规化引入 $D=D^0(1-\in)$，$D^0=4$. 这里时空反常维度 $\in$ 是纯数学的呢，还是物理的真实呢？量子场的反常维度 $\gamma_B(g_R)$ 与 $\gamma_F(g_R)$ 的实验已被实验所确定[2]：$\gamma_B(g_R)=0.045\pm0.015$，$\gamma_F(g_R)\simeq0.4\pm0.1$，但是它们的定义却包含着数学上的“随随便便”：

$$\gamma_B(g_R) = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_B^{\frac{1}{2}}(g_R) \tag{15}$$

$$\gamma_F(g_R) = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_F^{\frac{1}{2}}(g_R) \tag{16}$$

这里 $Z_B(g_R)=1-g_R^2/12\pi^2(\ln\Lambda^2/m^2)_\Lambda\to\infty$ 是个发散量，$Z_B(g_R)$ 与 $Z_F(g_R)$ 的解析性质，我们完全无知. (15)(16)确实更加令人担忧、

众所周知、非线性量子场方程求解的困难，对解的无知，是量子场论的致命焦点. 而且(1)—(16)式中的疑难既是数学的、也是物理的. 当前量子场论的重大疑团有：

物理数学	数学物理
1. Hilbert 空间的可数性	1. 能量-动量连续谱？
2. 算子值分布（广函）的性状	2. $g_I(x)$ 与 $g_I(k)$ 的物理
3. 质量的数学刻画（算子？）（时空过程、质壳）	3. 质量自由度与真空（同位旋空间）
4. 量子场的测度与具有连续阶导数的 pauli 定理	4. Hausdorff 测度的实验：$\gamma_B(g_R)$ 与 $\gamma_F(g_R)$、真实性？
5. $S_T^D(x)$ 的维度 $D=D^0(1-\in)$（Fractal、分形几何学）	5. 空时反常维度 $\in$ 的效应：（D^0 维仪器测 D 维物理量）
6. 空时点的数学刻画（点集拓扑）	6. 定域量子场与相对论（什么是基本场？）
7. 量子场 $\Phi_k(x)$ 与 $\Psi_k(x)$ 无穷可微（C^∞—函数类）	7. 非线性波动微分方程的解（需要物理辅助方程）

8. 亚群对称性的微分方程(类时) Callan-Symanzik 方程(类空)[3]	8. 亚群对称性 $SD(n)$ 的实验 (非 Abel 亚群数学?!)
9. 散射矩阵 $S(k,k';g_R)$ 与截断 Green 函数 $G(g_R,\gamma_{BF}(g_R),x)$	9. 费曼传播子的收敛形[4]状，$\Delta_R^F(k-k')$，$\Delta_R^F(x-x')$
10. 场算子广函的乘积，代数积 $q_k^+ a_k$，广函积	10. 找出强作用的规律，总结唯象研究(二、三个原理)
11. 公理化场论的完整描述	11. M. Born 几率的新性质 (Inttermittency)
12. D. Hilbert 第六问题(量子场论↔数学体系)	12. 量子场相互作用的分类原理是什么?

如果量子场具有 Hausdorff 测度[3]，$T(\lambda)=\exp[\lambda x\partial/\partial x]$ 是亚群变换(无穷阶微分算子)则

$$T(\lambda_B)\Phi_R(x)=\mathrm{Dim}[Z_B^{-1/2}(g_R)]\Phi(x)+Z_B^{-1/2}(g_R)\Phi(x+\lambda x) \tag{17}$$

$$T(\lambda_F)\Psi_R(x)=\mathrm{Dim}[Z_F^{-1/2}(g_R)]\Psi(x)+Z_F^{-1/2}(g_R)\Psi(x+\lambda x) \tag{18}$$

具有有序参数的亚群无穷小算子

$$\hat{D}=\lim_{\lambda\to 0_+}\frac{T(\lambda)-T(0)}{\lambda}=x\frac{\partial}{\partial x} \tag{19}$$

相互作用量子场的作用量

$$I(g_R,D)=\int \mathrm{d}^D x S_I(x)=ig_R\int \Phi\overline{\Psi}\Psi d^{D^0}x \tag{20}$$

其维度 $\mathrm{Dim}[I(g_R,D^0)]=0$，且 $\mathrm{Dim}[\overline{\Psi}]=\mathrm{Dim}[\Psi]$，将(17)－(19)代入(20)则亚群不变性要求

$$x\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x)=d_B^0\Phi(x) \qquad x\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x)=d_F^0\Psi(x) \tag{21}$$

$$\mathrm{Dim}[I]=Z\mathrm{Dim}[\Psi]+\mathrm{Dim}[\Phi]+D^0 \tag{22}$$

这时(21)可叫维度方程，(19)定义了维度算子。显然 $\Phi_R(x)$ 是 $Z_B^{-1/2}(g_R)$ 与 $\Phi(x)$ 的直乘积，因此(17)(18)式成立。注意 $Z_{BF}(g_R)$ 是 0-量纲的，维度与量纲是两个概念。将 $\Phi_R(x)$ 理解为映射 $Z_B^{-1/2}(g_R)|:\Phi\to\Phi_R$[2]，$Z_B^{-1/2}(g_R)$ 具有 Hausdorff 测度则量子场的 Hausdorff 维度

$$\dot{\mathrm{Dim}}[\Phi_R(x)]=d_B\Phi_R(x) \qquad d_B=d_B^0-\gamma_B(g_R) \tag{23}$$

$$\dot{\mathrm{Dim}}[\Psi_R(x)]=d_F\Psi_R(x) \qquad d_F=d_F^0-\gamma_F(g_R) \tag{24}$$

这里已用到定义 $\mathrm{Dim}[Z_{BF}(g_R)]=2\gamma_{BF}(g_R)$。辅助方程(21)与 Hausdorff 测度的性质导致截断 Green 函数(广函)的亚群不变性微分方程

$$\Big[\sum_{v=1}^{N}\sum_{\lambda=1}^{D^0} x_\lambda^v\frac{\partial}{\partial x_\lambda^v}+\mathscr{D}_0\Big]G^{(N)}_{(x_B,x_F)}=[N_F\gamma_F(g_R)+N_B\gamma_B(g_R)]G^{(N)}_{(x_B,x_F)} \tag{25}$$

这里 $\mathscr{D}_0=\beta(g_R)\partial/\partial g_R-\gamma_m(g_R)m_R\partial/\partial m_R$，$\beta(g_R)=\mathrm{Dim}[g_R]$，$\gamma_m(g_R)=\mathrm{Dim}[m_R]$。方程(25)中令 $\mathscr{D}_0=a\partial/\partial a$ 则得 $G^{(N)}(x)$ 的拟齐次广函解[1][5][6]。

(20)对应的非齐次波动方程为

$$\Big[\Big(\nabla^2-\partial_t^2\Big)-O^{*2}\Big]\Phi(x)=-g_R\overline{\Psi}\Psi \tag{26}$$

$$\Big[\Sigma\gamma_\lambda\frac{\partial}{\partial x_\lambda}+O^*\Big]\Psi(x)=g_R\Psi(x)\Phi(x) \tag{26'}$$

令 $x_v=\ln Z_v$ 则 $\nabla^2-\partial_t^2=\Sigma g_{\mu v}Z_v\partial/\partial Z_v\cdot Z_v\frac{\partial}{\partial Z_v}$，当 $Z_v=1+x_v'$ 时，注意 $x_v=\ln(1+x_v')=x_v(x_v,x_v'\to 0)$ 及量子场的连通性，立刻得到与(25)一致的非线性方程(26)(26')的特解。

$S_T^0(x)$的 Hausdorff 测度必须保证光维的维度与类空类时区相同；光维顶点是 O-维开闭曲面——这个现行点集拓扑概念，数学上对不对？孤立点与拓扑点的区别是什么？一维点、两维点，D^0-维点，D-维点的数学刻画，这是量子场定域性的立锥之地，糊涂不得[3].

方程(25)与大量 Multihadron Physics 实验数据符合，其数学问题值得研究，重整化与正规化的数学要求 $D=D^0(1-\in)$，时空反常维度($\in$)效应需要从理论与实验两个方面去探索．对于强相互作用量子场论，D. Hilbert 第六问题的答案应当是肯定的．

参考文献

[1] 赵树松，《量子场的物理原理》(1989. 4 月)

[2] S. S · Zhao，《Multiparticle Production》Proc. of Shandong Workshop. 497(June28－July6, 1987)Singapore, World Scientific

[3] 赵树松，屈超纯，《现代物理的数学进展》，云南大学学报 3(1989)214－222

[4] 赵树松，杨庆文，云南大学学报 1(1988)14－23

[5] 赵树松，彭守礼，《科学通报》Vol. 26, No. 11(1981)977－983(英文版)

[6] 赵树松，彭守礼，《科学通报》Vol. 31, No. 3(1986)161－169(英文版)

Mathematical Physics and Phsical Mathematics of Quantum Field Theory

Zhao Shuson
(Department of physics, Yunan University, Kunming Collabration of Multihadron Dynamics)

Pan Liuxian
(Department of physics, Yiyang Teachers College, Hunan)

Abstract In this paper, twelve suspicious are Summarized briefly in quantum field theory and Multihadron physics from 1970 untill 1989.

Key words quantmn field theory; Multihadron physics